**УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ
АНЖЕРО-СУДЖЕНСКОГО ГОРОДСКОГО ОКРУГА**

ВЫПИСКА ИЗ ПРОТОКОЛА ГОРОДСКОГО МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

от 02.11.2020 г. **№ 2**

Повестка дня

пункт 3

Обсуждение методических рекомендаций для учителей математики по итогам мониторинга предметных компетенций «Методические рекомендации по совершенствованию предметных компетенций учителя математики по вопросам исследования функций с помощью производной».

Слушали:

члена городского методического объединений учителей математики Климову Е.А., которая представила на обсуждение проект методических рекомендаций для учителей математики по итогам мониторинга предметных компетенций «Методические рекомендации по совершенствованию предметных компетенций учителя математики по вопросам исследования функций с помощью производной». В выступлении было отмечено, что по итогам мониторинга предметных компетенций учителей математики были выявлены затруднения в понимании связи свойств функций со значениями её производной. Опираясь на это и были подготовлены данные методические рекомендации

Решили:

– одобрить представленные рекомендации (с замечаниями);

– рекомендовать учителям математики использовать предложенные методические рекомендации для совершенствования предметных компетенций по вопросам исследования функций с помощью производной (срок: постоянно)

Начальник управления образования М.В. Семкина

Администрация Анжеро-Судженского городского округа * Управление образования администрации Анжеро-Судженского городского округа * ОГРН 1024200510245 * УО для документов * ИНН 4201008760 * Кемеровская область

Рассмотрено на заседании
методического объединения
учителей математики
от 02.11.2020 № 2

Методические рекомендации
по совершенствованию предметных компетенций
учителя математики по вопросам
исследования функций с помощью производной

(для учителей математики по итогам мониторинга предметных компетенций)

АСГО,2020

Анализ данных диагностики оценки предметных и методических компетенций учителей (октябрь 2020г), показал, что более 30% педагогов – учителей математики (особенно преподающих на уровне основного общего образования) испытывают затруднения в решении задач связанных с пониманием связи свойств функции со значениями её производной.

Ориентируясь на полученные результаты были подготовлены данные методические рекомендации для учителей математики по совершенствованию у них предметных компетенций по вопросам исследования функций с помощью производной.

Применение производной к исследованию функций, построению графиков, решению задач на нахождение наибольших и наименьших значений

Применение производной к исследованию функций, построению графиков, решению задач на нахождение наибольших и наименьших значений - важнейший раздел темы «Производная и её применение». Материал этой темы используется при изучении многих классов функций: тригонометрических, показательной, логарифмической и др. Он имеет также очень большое прикладное значение и играет большую роль в установлении межпредметных связей (в особенности с курсом физики).

В соответствии с ФГОС по математике раздел «Функции» включает следующие темы:

Функции. Область определения и множество значений. График функции. Построение графиков функций, заданных различными способами. Свойства функций: монотонность, четность и нечетность, периодичность, ограниченность. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума (локального максимума и минимума). Графическая интерпретация. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях.

Чтобы освоить данное содержание сам учитель должен уметь:

– определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции;

– строить графики изученных функций;

– описывать по графику поведение и свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения;

– решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков;

– использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков;

– вычислять производные элементарных функций, используя справочные материалы;

– исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов и простейших рациональных функций с использованием аппарата математического анализа.

Изучение темы «Применение производной к исследованию функций» требует знания некоторых определений и теорем, которые изучались ранее. Эти сведения учителю следует повторить по следующим аспектам: понятия возрастания и убывания функции на множестве, определение производной, ее геометрический смысл, в связи с этим – понятия касательной, углового коэффициента прямой, условие параллельных прямых.

Для совершенствования предметных компетенций по вопросам исследования функций с помощью производной важным является систематическая практическая отработка – решение задач где необходимо находить производные функций, пользоваться известными графиками для построения графиков других функций. Учителю необходимо повторить и метод интервалов. Наконец, для усвоения понятия экстремума функции и доказательства соответствующих теорем также следует повторить определение предела функции.

Признак возрастания (убывания) функции.

Одно из основных применений производной − это исследование функций, в частности нахождение промежутков возрастания и убывания.

Для подготовки к сознательному усвоению формулируемого в теме достаточного признака возрастания (убывания) функции (до его введения) учителю полезно рассмотреть геометрические иллюстрации, на которых показаны графики функций, имеющих разный характер изменения, а также касательные в точках, принадлежащих к промежуткам возрастания и промежуткам убывания функций. Анализируя расположение касательных по отношению к оси абсцисс (угол наклона) и определяя тем самым знаки значений производной, учитель подойдёт к самостоятельному формулированию требуемых признаков.

Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на I.

Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на I.

Доказательство этих признаков проводится на основании формулы Лагранжа.

Учителю необходимо осознавать наглядный смысл признаков, который приводится из физических рассуждений.

Пусть движущаяся по оси ординат точка в момент времени t имеет ординату $y = f(t)$. Тогда скорость этой точки в момент времени t равна $f'(t)$. Если $f'(t) > 0$ в каждый момент времени из промежутка I, то точка движется в положительном направлении оси ординат, т. е. если $t_1 < t_2$, то $f(t_1) < f(t_2)$. Это означает, что функция f возрастает на промежутке I.

Пример. Найти промежутки возрастания и убывания функции.

$y = xe^{-3x}$

Решение: найдем производную функции (заметим, что она существует для всех $x \in R$):

$y' = e^{-3x} - 3x^{-3x} = e^{-3x}(1-3x)$.

Приравняем производную к нулю: $e^{-3x}(1-3x) = 0$, откуда $x = \frac{1}{3}$.

При $x < \frac{1}{3}$ $y' > 0$, следовательно, при $x \in (-\infty; \frac{1}{3})$, функция возрастает, а при $x > \frac{1}{3}$ $y' < 0$, следовательно, при $x \in (\frac{1}{3}; +\infty)$, функция убывает [3].

После повторения и закрепления темы на возрастание (убывание) функции, вводится понятие критической точки или экстремумов функции.

Критические точки функции, ее максимумы и минимумы.

Теоретический материал этой темы составляет основу получения общего метода решения большого класса задач − задач на нахождение экстремумов функций. В данной теме рассматривается необходимый признак экстремума (Теорема Ферма) и достаточный признак максимума и минимума. Учителю необходимо:

1. Повторить понятие точек экстремума и понятие экстремума.
2. Используя таблицу с рисунками (графиками функций) самостоятельно сформулировать признаки максимума и минимума функции:

1) Укажите точки максимума и минимума функции.

2) Определите знак значений производной функции в промежутке слева от точки максимума (минимума).

3) Определите знак значений производной функции в промежутке справа от точки максимума (минимума).

4) Как меняется знак производной при прохождении через точку максимума (минимума)?

Учителю необходимо приводить доказательство признаков максимума и минимума функции.

<u>Рассмотрим определение критической точки:</u>

Определение. Внутренние точки области определения функции, в которых она равна нулю или не существует, называют критическими точками этой функции.

Эти точки играют важную роль при построении графика функции, поскольку только они могут быть точками экстремума функции. Рассмотрим соответствующее утверждение, его называют теоремой Ферма.

Необходимое условие экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции f, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Важно отметить, что теорема Ферма лишь необходимое условие экстремума: из того, что производная в точке x_0 обращается в нуль, необязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум. Например, производная функции $f(x) = x^3$ обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке не имеет.

Рассмотрим теперь критические точки, в которых производная не существует.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Эта функция не имеет производной в точке 0. Значит, 0 − критическая точка. Очевидно, что в точке 0 функция имеет минимум.

Пример 2. Точка 0 для функции $y = \sqrt{x}$ не является критической: в ней производная не существует, но она не внутренняя точка области определения.

Из теоремы Ферма следует, что при нахождении точек экстремумов функции требуется в первую очередь найти ее критические точки. Учитель должен обратить внимание учеников, что вопрос о том, действительно ли данная критическая точка есть точка экстремума, требует дополнительного исследования. При этом часто помогают такие достаточные условия существования экстремума в точке.

Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Учитель может пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: если в точке

x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x)<0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x)>0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума [2].

Пример. Найти экстремумы функции $f(x)=xe^{x-x^2}$.

Решение: область определения заданной функции есть множество всех действительных чисел. Найдем критические точки функции, для чего решим уравнение $f'(x)=e^{x-x^2}(1+x-2x^2)$.

Так как $e^{x-x^2}\neq 0$, то имеем $1+x-2x^2=0$, откуда $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$.

Исследуем знак производной функции на всех промежутках, на которые стационарные точки разбили множество R. При $x<-\frac{1}{2}$ $y'>0$, при $-\frac{1}{2}<x<1$ $y'<0$, а при $x>1$ $y'>0$. Итак, $x=-\frac{1}{2}$ - точка максимума функции, а $x=1$ - точка минимума функции.

Учителю необходимо рассмотреть тему на наибольшее и наименьшее значение функции, обращая особое внимание на тот факт, что наибольшее (наименьшее) значение функции не является максимумом (минимумом) функции.

<u>Наибольшее и наименьшее значения функции.</u>

Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсах анализа доказывается теорема Вейерштрасса, утверждающая, что непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение, т. е. существуют точки отрезка $[a;b]$, в которых f принимает наибольшее и наименьшее на $[a;b]$ значения.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$f(x)=2\cos(\frac{2\pi}{3}-3)-\frac{3}{2}\sin(2x+\frac{2\pi}{3})-x$ на отрезке $[-\frac{5\pi}{6};\frac{2\pi}{3}]$.

Решение: запишем выражение для функции в более удобном виде, воспользовавшись для этого свойством четности функции косинуса

$$f(x)=2\cos(x-\frac{2\pi}{3})-\frac{3}{2}\sin(2x+\frac{2\pi}{3})-x.$$

Найдем $f'(x)$

$$f'(x)=-2\sin(x-\frac{2\pi}{3})-3\cos(2x+\frac{2\pi}{3})-1=-2\sin(x-\frac{2\pi}{3})-3+6\sin^2(x+\frac{\pi}{3})-1=$$

$$2(3\sin(x+\frac{\pi}{3})-2)(\sin(x+\frac{\pi}{3})+1).$$

Найдем значения аргумента, при которых $f'(x)=0$, для чего решим уравнения $3\sin(x+\frac{\pi}{3})=2$ и $\sin(x+\frac{\pi}{3})=-1$. Имеем следующую совокупность решений

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k, k\in Z \\ x=-\frac{\pi}{3}-\arcsin\frac{2}{3}+(2k+1)\pi, k\in Z, \\ x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

Отрезку $[-\frac{5\pi}{6};\frac{2\pi}{3}]$ принадлежит только три решения уравнения $x_1=-\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{2}{3}, x_2=\frac{2\pi}{3}-\arcsin\frac{2}{3}, x_3=-\frac{5\pi}{6}$.

Действительно, длина заданного в условии задачи отрезка меньше 2π, то есть меньше разности каждой из трех арифметических прогрессий, записанной выше совокупности решений, поэтому рассматриваемому отрезку принадлежит не более одного числа каждого семейства.

Так как функция $y=\arcsin x$ возрастает на своей области определения, то $\arcsin\frac{1}{2}<\arcsin\frac{2}{3}<\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $\frac{\pi}{6}<\arcsin\frac{2}{3}<\frac{\pi}{3}$, откуда следует, что $-\frac{\pi}{6}<x_1<0<x_2<\frac{\pi}{2}$. То есть отрезку $[-\frac{5\pi}{6};\frac{2\pi}{3}]$ принадлежат x_1 и x_2.

Находя значения $f(-\frac{5\pi}{6}), f(-\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{2}{3}), f(\frac{2\pi}{3}-\arcsin\frac{2}{3}), f(\frac{2\pi}{3})$ и сравнив их, находим, что на отрезке $[-\frac{5\pi}{6};\frac{2\pi}{3}]$ функции $f(x)$ имеет наибольшее значение $f(-\frac{5\pi}{6})=\frac{5\pi}{6}$, а наименьшее значение $f(-\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{2}{3})=-\frac{4\sqrt{5}}{3}+\frac{\pi}{3}-\arcsin\frac{2}{3}.$

Для совершенствования умений исследования функций с помощью производной необходимо систематизировать знания, относящиеся к вопросам нахождения промежутков возрастания (убывания) и экстремумов, актуализировать знания по теме общий метод получения результатов.

Все положения, которые нужно отразить в решении задания на исследование, имеют теоретические обоснования, общие методы решения.

Учителю нужно самостоятельно проводить исследование функций по общей схеме и строить их графики. Построения графика функции необходимо начинать с исследования функции, которое состоит в том, что для данной функции:

1) находят ее область определения;

2) выясняют, является ли функция f четной или нечетной, является ли периодической;

3) точки пересечения графика с осями координат;

4) промежутки знакопостоянства;

5) промежутки возрастания и убывания;

6) точки экстремума и значения f в этих точках;

7) исследуют поведение функции в окрестности «особых» точек и при больших по модулю x;

На основании такого исследования строится график функции.

Исследование функции на возрастание (убывание) и на экстремум удобно проводить с помощью производной. Для этого сначала находят производную функции f и ее критические точки, а затем выясняют, какие из них являются точками экстремума.

Пример 1. Исследуем функцию $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ и построим ее график.

Проведем исследование по указанной схеме.

1) $D(f) = R$, так как f - многочлен.

2) Функция f не является ни четной, ни нечетной

3) График f пересекается с осью ординат в точке $(0;2);$ чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, надо решить уравнение $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$, один из корней легко найти $(x = 1)$. Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Промежутки знакопостоянства не находим.

4) Найдем производную функции f:

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$

$D(f') = R$, поэтому критических точек, для которых $f'(x)$ не существует, нет.

Заметим, что $f'(x) = 0$, если $x^2(x^2 - 1) = 0$, т.е. при значениях аргумента, равных 0,-1 и 1. Рассматриваемая функция имеет три критические точки.

Пример 2. Исследовать функцию $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

1) $D(f) = R$

2) Функция четная, исследование ее можно проводить на промежутке $[0;\infty)$.

3) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат, т.е. решим уравнение $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$. Пусть $x^2 = y,$ тогда уравнение примет вид: $y^2 - 2y - 3 = 0, y = 3$ или $y = -1$, т.е. $x = \sqrt{3}$ или $x = -\sqrt{3}$, $x^2 = -1$ не имеет решения. Получили две точки пересечения с осью абсцисс $M(\sqrt{3};0), K(-\sqrt{3};0)$. График пересекает ось ординат в точке $B(0;-3)$.

4) Найдем производную функции $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$

5) Найдем критические точки функции:

а) $f'(x) = 0$, если $4x(x-1)(x+1) = 0$, $x = 0$, или $x = 1$, или $x = -1;$

б) f' определена на всей $D(f)$

Приведем примеры заданий для самостоятельной работы по исследованию функций. Исследуйте функцию и постройте ее график:

1) $f(x)=x^2-2x+8.$ 2) $f(x)=-\dfrac{2x^2}{3}+x+\dfrac{2}{3}$ 3) $f(x)=3x^2-x^3$ 4) $\sin^2 x+\sin x$

5) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

Типичные ошибки при исследовании функций,
которые необходимо учитывать учителю

При проведении исследования функций, педагоги нередко допускают ошибки.

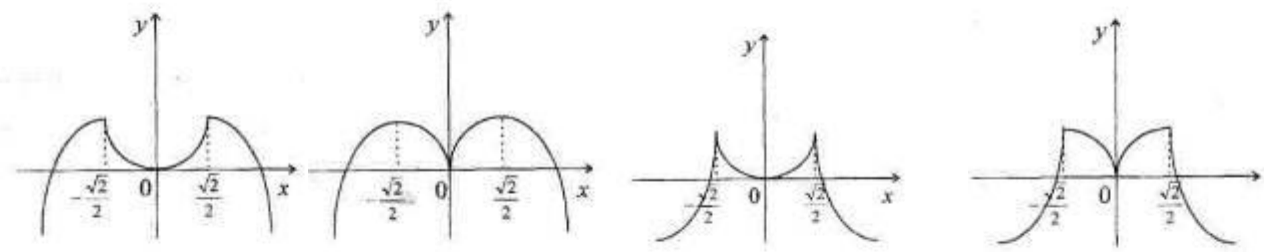
Значительное число ошибок допускается при построении графиков функции с использованием производной.

а) Пусть требуется исследовать с помощью производной функцию $f(x)=x^2-x^4$ и построить ее график. Результаты исследования функции оформим в виде таблицы (таб. 1).

Таблица 1

x		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+		−
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘	0	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘
		Max		min		max	

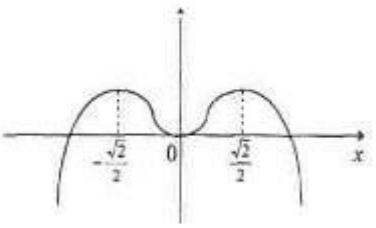
Покажем ошибочные эскизы графиков, которые педагоги изображают по данной таблице



На каждом из этих рисунков допущены грубые математические ошибки и происходят они из-за того, что учителя используют из таблицы лишь сведения о том, где функция возрастает и где убывает, и совершенно не берут во внимание существование производной функции в критических точках. В таблице 1 отмечено, что в точках, $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x=0, x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ производная функции существует, а это означает, что в точках с этими абсциссами можно провести касательную. Тот факт, что производная функции в этих точках равна нулю, означает, что в точках с этими абсциссами касательные к кривой должны быть параллельны оси Ox. Анализ рисунков показывает, что указанное выше требование нарушено, а именно, на рисунке 3 нельзя провести касательную к кривой с абсциссой $x=0$; на рисунках 4 и 5 – в точках с абсциссами

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; на рисунке 6 – в точках с абсциссами $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, x=0, x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Правильный график функции $f(x)=x^2-x^4$ показан на рисунке.

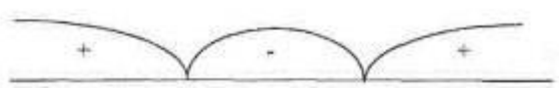


б) При исследовании функции на монотонность нередко учителя не учитывают точек, в которых функция неопределенна. Приведем пример такой ошибки.

Исследовать функцию $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ на монотонность.

Часто педагоги поступают так: $f'(x)=2-\frac{2}{x^3}$; находят точки, в которых производная равна нулю: $2x^3-2=0, x-1$; затем, множество всех действительных чисел разбивают точкой $x=1$ на два промежутка $x<1; x>1;$ находят знаки производной на каждом промежутке и делают затем ошибочный вывод о монотонности функции на каждом из этих двух промежутков.

Поступать же надо было так. Множество всех действительных чисел следовало бы разбить на промежутки точками, в которых функция не определена и точками в которых производная равна либо нулю, либо равна бесконечности, либо не существует. В данном случае мы получим три промежутка: $x<0, 0<x<1, x>1$. Знак производной функции на каждом из них отмечен на рисунке.



Ответ должен быть записан в следующем виде:

на промежутке $x<0$ функция возрастает;

на промежутке $0<x<1$ функция убывает;

на промежутке $x>1$ функция возрастает.

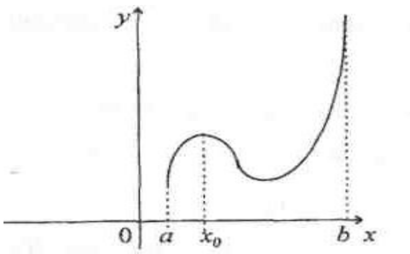
По поводу записи ответа отметим следующее: если функция $f(x)$ непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания (убывания), то его можно присоединить к этому промежутку. Так, в нашем случае, в точке $x=1$ функция непрерывна, а значит промежутки могли бы быть записаны так: $0<x\le 1, x\ge 1$.

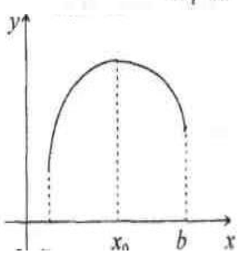
в) Ряд ошибок связан с решением текстовых задач на экстремум. Проанализируем эти ошибки.

Нередко педагоги в процессе решения задач на экстремум при исследовании полученной функции на наибольшее (наименьшее) значение делают такой вывод: «Функция на промежутке имеет один максимум, тогда максимальное значение и будет наибольшим». Такое утверждение содержит ошибки, разберем суть этих ошибок.

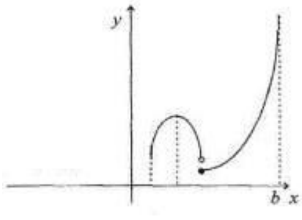
На рисунке показан график такой функции, которая на промежутке $[a,b]$ имеет одну точку максимума, но максимальное значение не является наибольшим; наибольшее значение функция достигает в точке $x=b$.

Педагоги были бы почти правы, если бы они записали вывод в таком виде: «Функция на промежутке имеет один экстремум, который максимум, тогда максимальное значение будет и наибольшим на данном промежутке». Этому утверждению соответствует рисунок.





Но и последнее утверждение содержит ошибку. На рисунке показан график функции, которая на отрезке $[a,b]$ имеет одну точку экстремума, которая является точкой максимума, но максимальное значение не является на этом промежутке наибольшим; наибольшее значение достигается при $x=b$.



Обобщая проведенные рассуждения, вывод, сделанный педагогами, должен быть таким: «Непрерывная функция имеет на промежутке одну точку экстремума, которая является точкой максимума, тогда это максимальное значение и будет наибольшим на указанном промежутке».

Приведенных примеров типичных ошибок, допускаемых педагогами в решении задач связанных с пониманием связи свойств функции со значениями её производной, вполне достаточно, чтобы показать насколько важно самим учиться, рефлексивно-оценочной деятельности, которая позволит устранить и предупредить подобного рода ошибки.